Durée : 144 minutes

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2022

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\boldsymbol{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
– Pour $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien est défini par $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
– Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors une solution au sens des moindres carrés $\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ satisfait

☐ $\widehat{x}_1 = \frac{6}{17}$. ☐ $\widehat{x}_1 = \frac{12}{35}$. ☐ $\widehat{x}_1 = -\frac{6}{17}$. ☐ $\widehat{x}_1 = -\frac{12}{35}$.

Question 2 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

☐ $r_{14} = -4$. ☐ $r_{14} = -3$. ☐ $r_{14} = -6$. ☐ $r_{14} = 0$.

Question 3 : La droite de régression linéaire pour les points $(-2, -1), (0, 1), (2, -2), (4, 1)$ est

☐ $y = \frac{2}{5} + \frac{3}{20}\, x$. ☐ $y = -\frac{2}{5} - \frac{3}{20}\, x$. ☐ $y = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\, x$. ☐ $y = -\frac{2}{5} + \frac{3}{20}\, x$.

Question 4 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 4z = a \\ x - z = 2 \end{cases}$$

possède des solutions si et seulement si

☐ $a = -\frac{2}{9}$. ☐ $a = \frac{2}{9}$. ☐ $a = -\frac{9}{2}$. ☐ $a = \frac{9}{2}$.

Question 5 : Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la troisième colonne de P est

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Question 6 : Soit t un paramètre réel. Les vecteurs

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

☐ $t \neq 5$. ☐ $t = 5$. ☐ $t \neq -5$. ☐ $t = -5$.

Question 7 : Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{P}_2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \{1,\, t+t^2,\, t-t^2\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

des bases de $\mathbb{P}_2$ et $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ respectivement. La matrice A associée à T relative à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, telle que $\big[T(p)\big]_{\mathcal{C}} = A\big[p\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 8 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 3b & c \\ d+2a & 3e+6b & f+2c \\ g & 3h & k \end{pmatrix}$$

deux matrices de taille 3×3. Si $\det(A) = 1$, alors on a

☐ $\det(B) = 1$. ☐ $\det(B) = 2$. ☐ $\det(B) = 3$. ☐ $\det(B) = 6$.

Question 9 : L'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 10 : L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

fournit une base orthogonale de $\mathrm{Img}(A)$ donnée par les vecteurs

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Question 11 : La projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur le sous-espace vectoriel engendré par la première et la deuxième colonne de la matrice A de la Question 10 est le vecteur

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}.$

Question 12 : La matrice A de la Question 10 possède une décomposition QR telle que

☐ $r_{23} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$ ☐ $r_{23} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$ ☐ $r_{23} = -2.$ ☐ $r_{23} = -\sqrt{6}.$

Question 13 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors

☐ $\lambda = 4$ est une valeur propre avec multiplicité géométrique 2.

☐ $\lambda = 3$ est une valeur propre avec multiplicité algébrique 1.

☐ $\lambda = 3$ est une valeur propre avec multiplicité géométrique 2.

☐ $\lambda = 4$ est une valeur propre avec multiplicité géométrique 1.

Question 14 : Soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ T est injective mais pas surjective.

☐ T n'est ni injective ni surjective.

☐ T est injective et surjective.

☐ T est surjective mais pas injective.

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 15 : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et soient $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Si les vecteurs $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $\operatorname{proj}_V(\boldsymbol{w}_1)$ et $\operatorname{proj}_V(\boldsymbol{w}_2)$ sont linéairement indépendants.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Soit $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ est une famille orthogonale, alors $\boldsymbol{v}_0$ est orthogonal à $\operatorname{Vect}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Si A est une matrice de taille $m \times n$, alors on a

$$\dim\big(\operatorname{Img} A\big) + \dim\big(\operatorname{Img} A^T\big) + \dim\big(\operatorname{Ker} A\big) + \dim\big(\operatorname{Ker} A^T\big) = m + n\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soient A et P deux matrices de taille $n \times n$. Si P^TAP est symétrique, alors A est symétrique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit $W = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\}$. Alors W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si R est la forme échelonnée réduite de A, alors

$$\det(A) = \det(R).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$. Si A et B ont le même polynôme caractéristique, alors A et B ont les mêmes valeurs propres et pour chaque valeur propre λ on a

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(B - \lambda \mathrm{I}_n)\big)\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soient V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $T : V \to W$ une application linéaire. Soit d la dimension de l'image de T. Alors $d \leq \dim(W)$ et $d \leq \dim(V)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Si A est une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes forment une base de $\mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ possède une solution unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de V. Si toute sous-famille de $\mathcal{F}$ formée de $n-1$ éléments est linéairement indépendante, alors $\mathcal{F}$ est une base de V.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $(A+B)^2$ est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : L'ensemble $\{p \in \mathbb{P}_n : p(-t) = -p(t)\,,\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Si $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors la matrice

$$A = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T - \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{w}^T$$

est diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 28 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels telle que sa forme échelonnée réduite contient exactement k lignes nulles. Déterminer le rang de A et la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ en fonction de m, n et k.

Question 29 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$ à coefficients réels. Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A et $W = \text{Vect}\{\boldsymbol{v}\}$. Montrer que si $\boldsymbol{y} \in W^{\perp}$, alors $A\boldsymbol{y} \in W^{\perp}$.

Question 30 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels et soit O la matrice nulle de taille $n \times n$.

Montrer que si A est diagonalisable et $A^2 = O$, alors $A = O$.